INSTITUTO FRAY M. ESQUIÚ
MATEMÁTICA - 3° A - E.S.B.
PROF. VIRGINIA PENEDO
UNIDAD IV: FUNCIÓN LINEAL

Toda función cuya fórmula es $\boldsymbol{y = ax + b}$ se denomina **función lineal** y su representación gráfica es una **recta**.

$$\boldsymbol{f(x) = y = ax + b}, \qquad \text{donde } \boldsymbol{a} \in \Re - \{\boldsymbol{0}\} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b} \in \Re$$

La fórmula $\boldsymbol{y = ax + b}$ se denomina **ecuación explícita de la recta.**

La **pendiente (a)** es la inclinación de la recta respecto del eje x.

$$Si\ \ \boldsymbol{a} > \boldsymbol{0} \Rightarrow la\ función\ es\ creciente$$

$$Si\ \ \boldsymbol{a} < \boldsymbol{0} \Rightarrow la\ función\ es\ decreciente$$

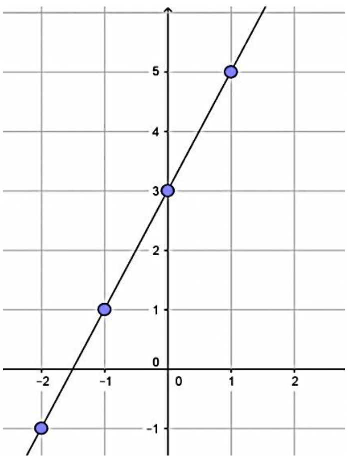
La **ordenada al origen(b)** es el valor donde la recta corta al eje y. $\boldsymbol{f(0) = b}$

La **raíz** es el valor donde la función vale cero, y donde la recta corta al eje x. $\boldsymbol{f(x) = 0}$

Ejemplo: La fórmula $\mathrm{f(x) = 2x + 3}$, significa que la función asigna a cada valor de "x", un valor de "y" que se obtiene multiplicando a la "x" por dos y sumándole tres.

<u>Tabla de valores:</u> se asigna cualquier valor a la variable independiente, se hacen los cálculos y se obtiene el valor de la variable dependiente correspondiente

x	$\boldsymbol{2x + 3 = y}$	
0	$2.\boldsymbol{0} + 3 = 3$	$\longrightarrow$ $Par\ ordenado\ (0;3) \rightarrow f(0) = 3$
1	$2.\boldsymbol{1} + 3 = 5$	
2	$2.\boldsymbol{2} + 3 = 7$	
-1	$2.(\boldsymbol{-1}) + 3 = 1$	
-2	$2.(\boldsymbol{-2}) + 3 = -1$	
-3	$2.(\boldsymbol{-3}) + 3 = -3$	$\longrightarrow$ $Par\ ordenado\ (-3;-3) \rightarrow f(-3) = -3$



<u>Representación gráfica de la función</u>

Se llevaron al plano cartesiano algunos puntos de la tabla de valores y quedó representada la función con una recta, en este caso.

Cuando un punto pertenece a la función, quiere decir que se cumple la igualdad dada en la fórmula; por ejemplo:

El punto $(1;5) \in \mathrm{f(x) = 2x + 3}$ porque cuando la x = 1 se obtiene y = 5; en cambio el punto $(-1;3) \notin \mathrm{f(x) = 2x + 3}$ porque cuando la x = -1 se obtiene y = 1.

<u>Intersección de la recta con el eje de abscisas (x)</u>

El punto donde la recta corta al eje x se denomina ***Raíz o Cero*** de la función. Se calcula resolviendo una ecuación, igualando la función a cero.

En nuestro ejemplo: $f(x) = 2x + 3 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \mathbf{2x = -3} \quad \Rightarrow \; \mathbf{x} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ puedes observar en el gráfico que la recta interseca en **x = -1,5**

Forma implícita de la ecuación de la función lineal

La ecuación de la función no siempre aparece en forma $\boldsymbol{y = ax + b}$**,** al contrario, es más frecuente que encontremos las variables afectadas por distintas operaciones. Para pasar de forma implícita a explícita debemos despejar la "y"; de esa manera vemos la pendiente y la ordenada.

Ejemplo: $\frac{3x-2y}{5} - \frac{2x-4y}{3} = \frac{x-y}{2} + 1 \quad FORMA\ IMPLÍCITA$

$$\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1$$

$$\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x - \frac{2}{5}y + \frac{4}{3}y + \frac{1}{2}y = 1$$

$$-\frac{17}{30}x + \frac{43}{30}y = 1$$

$$\frac{43}{30}y = 1 + \frac{17}{30}x$$

$$y = \left(1 + \frac{17}{30}x\right) : \frac{43}{30}$$

$$y = \frac{30}{43} + \frac{17}{43}x \quad FORMA\ EXPLÍCITA \quad donde\ a = \frac{17}{43} \quad y \quad b = \frac{30}{43}$$

ACTIVIDAD 1)

a) Expresar en forma explícita. Construir una tabla de valores, en cada caso, y representar las funciones. Luego indicar pendiente, ordenada al origen y realizar el análisis completo.

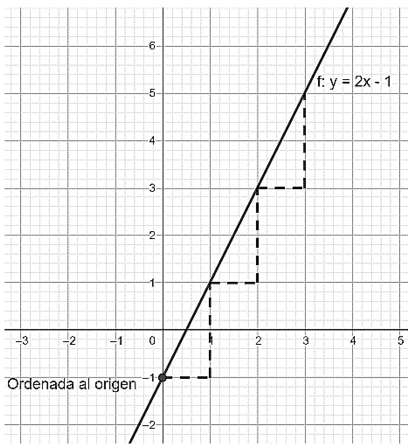
$a)\ y - 3x - 9 = 0$	$b)\ 2y - 5x - 1 = 0$	$c)\ 2x - 4y + 6 = 0$
$d)\ y = -5$	$e)\ y + 3x = 0$	$f)\ 2y - 4 + 3x = 0$
$g)\ \frac{1}{2}y - 3x - \frac{2}{5} = 0$	$h)\ \frac{3x - 4y}{2} = 1$	$i)\ \frac{2x + 3y - 4}{5} = -2$

b) Dada la función $f(x) = \frac{4}{3}x - 2$,

1) Calcular $f(-1),\ f(-3)\ y\ f\left(\frac{3}{4}\right)$
2) Determinar la preimagen de $-\frac{4}{3}$
3) Hallar $f(x) = 0;\ f(x) = -\frac{8}{3}$

c) Determinar analíticamente, si los puntos que se detallan pertenecen a la recta de ecuación y =-2x + 3

$A(0;-1)$, $B\left(\frac{3}{2};0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};4\right)$, $D(1;1)$, $E\left(-\frac{3}{4};\frac{9}{2}\right)$



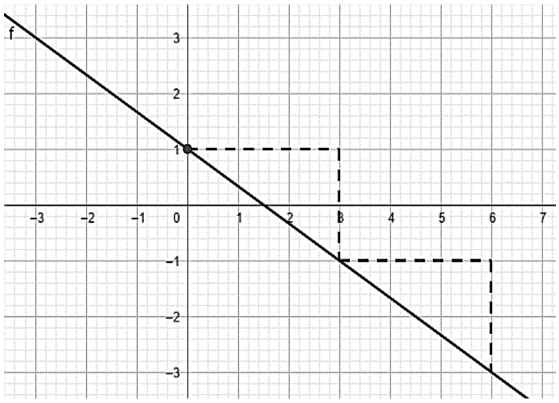
Graficar una función por pendiente y ordenada

Para representar una función lineal no se necesita construir una tabla de valores, se puede graficar teniendo en cuenta la pendiente y la ordenada al origen, para ello debe estar siempre en forma explícita.

Dada la fórmula: $y = 2x - 1$

1°) Se marca la ordenada al origen sobre el eje "y"

2°) Luego la pendiente $a = \frac{2}{1}\ \frac{unidades\ que\ desplazo\ hacia\ arriba\ (+)}{unidades\ que\ desplazo\ a\ la\ derecha}$



Otro ejemplo: $y = -\frac{2}{3}x + 1$

1°) Se marca la ordenada al origen sobre el eje "y"

2°) Luego la pendiente

$$a = -\frac{2}{3}\ \frac{unidades\ que\ desplazo\ hacia\ abajo\ (-)}{unidades\ que\ desplazo\ a\ la\ derecha}$$

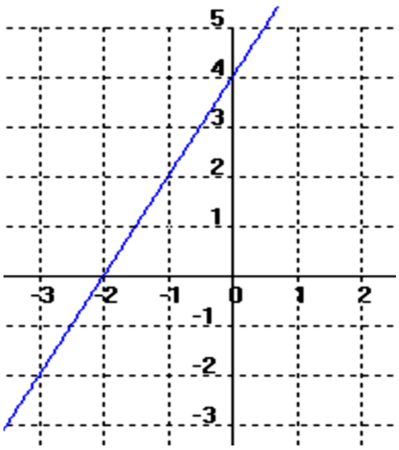
<u>ACTIVIDAD 2)</u>

a) Representar las siguientes funciones por pendiente y ordenada:

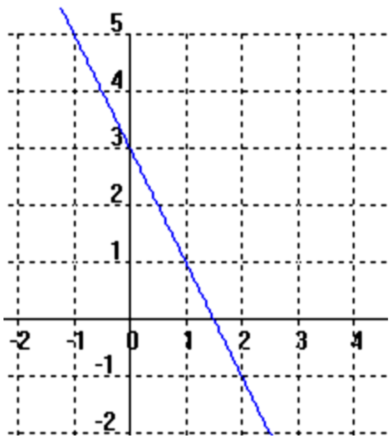
$a)\ y - \frac{1}{3}x - 2 = 0$ $\quad b)\ 2y - 6x - 3 = 0$ $\quad c)\ 6x - 4y + 9 = 0$

b) Para cada uno de los siguientes gráficos; hallar la ecuación de la recta.

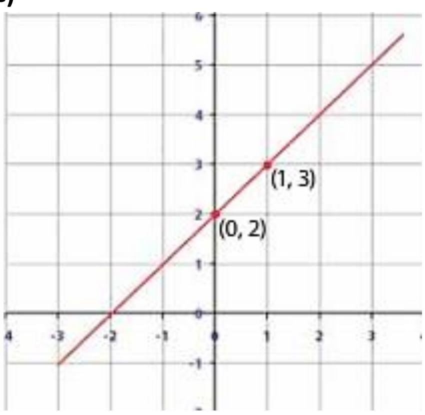
a)



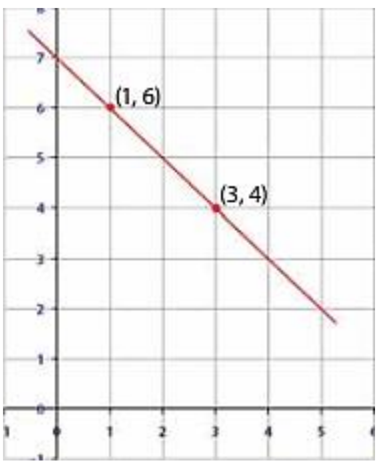
b)



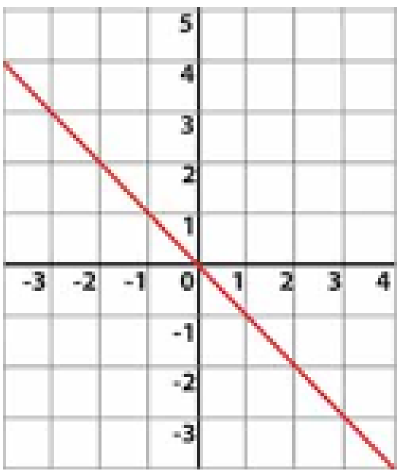
c)



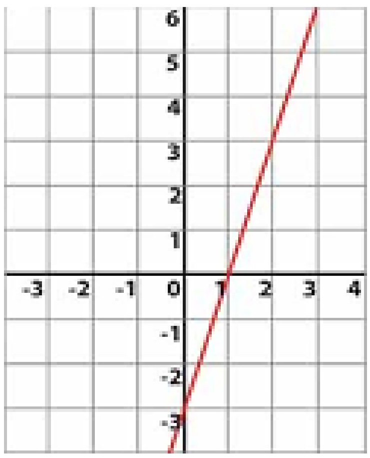
d)



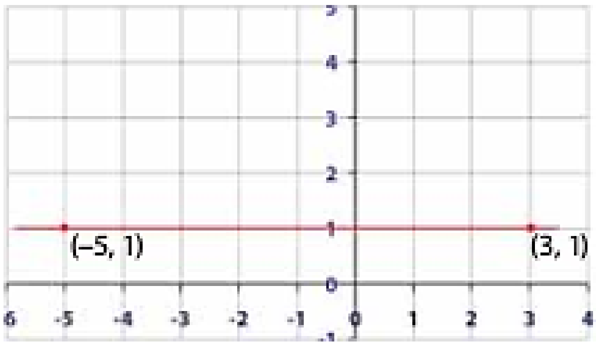
e)



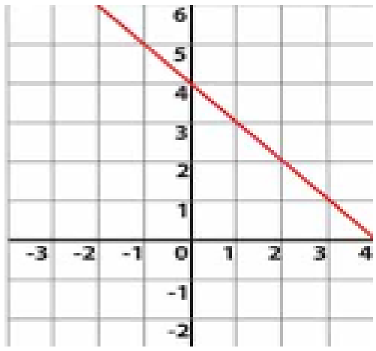
f)



g)



h)



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Dados dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano $P_1 = (x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ la fórmula para averiguar la distancia entre ellos, está dada por:

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$$

COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Dado un segmento definido por los puntos $P_1 = (x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ se calculan las coordenadas del punto medio con las fórmulas:

$$(\boldsymbol{Punto\ Medio})\ \boldsymbol{P_m} = \left(\boldsymbol{X_m} = \frac{\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}}{\boldsymbol{2}} \quad ; \ \boldsymbol{Y_m} = \frac{\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2}}{\boldsymbol{2}}\right)$$

ACTIVIDAD 3)

a) Calcular la distancia entre los puntos:

$A(6; 0)\ y\ B(0; -8)$ $\qquad$ $C(2; -1)\ y\ D(-7; -1)$ $\qquad$ $E(4; 2)\ y\ F(7; 3)$

b) Si los vértices de un triángulo son: $A(2; 3)$, $B(3; 7)$ y $C(5; -2)$

I. Calcular la longitud de los tres lados

II. Hallar las coordenadas del punto medio del lado $\overline{BC}$

III. Hallar la longitud entre el P_m y el vértice C

IV. Verificar que dicha longitud sea la mitad del segmento en cuestión.

c) Verificar analíticamente si los puntos: $A(0; 0)$, $B(3; 4)$, $C(8; 4)\ y\ D(5; 0)$ son los vértices de un rombo. Calcular su área

d) Demostrar que los puntos $A(0; 1)$, $B(3; 5)$, $C(7; 2)\ y\ D(4; -2)$ son los vértices de un cuadrado. Hallar las

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Dados dos puntos cualesquiera del plano, ambos determinan una única recta (que pasa por ellos). Es posible hallar la ecuación de una función conociendo las coordenadas de dos puntos que le pertenezcan.

Dados los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$, la fórmula que me permite llegar a la ecuación de la recta, es:

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_1} = \frac{\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1}}{\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}}.(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1})$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A(-2; -1)\ y\ B(1; 5)$. Entonces, para este caso

$x_1 = -2,\ \ y_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 5$

Aplicando la fórmula: $y-(-1)=\frac{5-(-1)}{1-(-2)}.(x-(-2))$

$$y+1=\frac{6}{3}(x+2) \;\Rightarrow\; y=2(x+2)-1 \;\Rightarrow\; y=2x+4-1 \;\Rightarrow y=2x+3$$

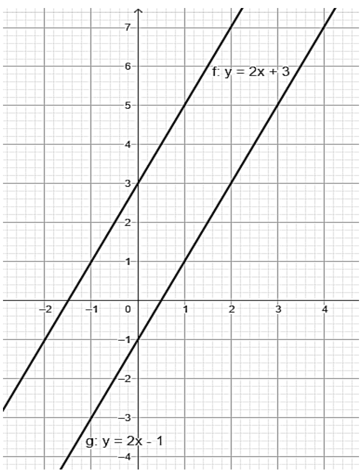
Verificar gráficamente.

ACTIVIDAD 4)

1) Determinar analíticamente la ecuación de la recta que cumple que:
   a) La ordenada al origen es -3 y la pendiente = 4
   b) Pasa por el punto (3;4) y a = -2
   c) Pasa por el origen y su pendiente es -3/4
   d) Interseca al eje de ordenadas en 4 y su pendiente es -1
   e) Tiene pendiente 2/3 y su raíz es x = -1
   f) Interseca el eje de abscisas en 4 y su pendiente es -1
   g) Pasa por los puntos (-2;5) y (1;-3)
   h) Corta al eje “y” en -2 y al eje “x” en 7
   i) Satisface que $f(3)=1 \;\; y \;\; F(-2)=9$

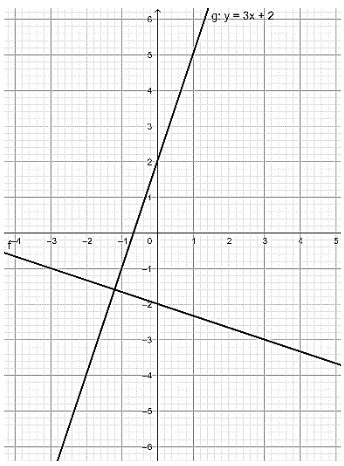
2) Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos
   $a)\; A(-3;-1)\;\; y\;\; B(2;-6)$
   $b)\; P(0;-1)\; y\;\; Q(3;1)$
   $c)\; R(-2;1)\;\; y\;\; S(6;-3)$
   $d)\; H(2;-3)\;\; y\;\;\; J(-4;-3)$

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES



Dos o más rectas son **paralelas** cuando tienen la misma pendiente

$$\begin{cases} f: y=2x+3 \\ g: y=2x-1 \end{cases}$$



Dos o más rectas son **perpendiculares** cuando sus pendientes son inversas y opuestas.

$$\begin{cases} f: y=-\dfrac{1}{3}x-2 \\ g: y=3x+2 \end{cases}$$

Si dos rectas no son paralelas ni perpendiculares, entonces son **oblicuas**

ACTIVIDAD 5)

a) Indicar cuáles de las siguientes ecuaciones representan paralelas y perpendiculares

$A: 2x-3y=5 \qquad B: \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{2}=1 \qquad C: 2x+3y-7=0 \qquad D: 3x=4-2y \qquad E: \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$

b) Dado el punto P(-1;1) determinar analíticamente en cada caso la ecuación de la recta que pasa por P y cumple la condición pedida:

I. Tiene pendiente nula
II. Pasa por el origen de coordenadas
III. Es paralela a la recta de ecuación $x + \frac{1}{4}y = 1$
IV. Es perpendicular a la recta que une los puntos A(-1;2) y B(3;-4)

c) Hallar la ecuación de la recta que cumple las condiciones dadas. Representar gráficamente cada situación para verificar.
I. Pasa por (-1; 5) y es paralela a la recta $2y - 3x = 1$
II. Pasa por (4; -1) y es perpendicular a la recta $x = 2y - 1$
III. Pasa por la abscisa 5 y es perpendicular a la recta $3x - 2y + 1 = 0$
IV. Pasa por los puntos A(-1; 3) y B(2; -1)
V. Pasa por los puntos P(-2;3) y Q(0; -2)
VI. Pasa por (-2; -1) y es paralela a la recta que contiene a los puntos A(-2; 2) y B(3; -2)
VII. Pasa por (3; -3) y es perpendicular a la recta $y + 3x - 2 = 0$

d) Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la recta $2x + ky - 3 = 0$ sea paralela a la recta $y + 3x - 2 = 0$

e) Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la recta $3y - 2kx + 1 = 0$ sea perpendicular a la recta $2x + y = 3$

f) Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero son:

$$3x - 8y + 36 = 0\,; \quad x + y - 10 = 0\,; \quad 3x - 8y - 19 = 0 \quad e \quad y + x + 1 = 0$$

Demostrar que es un paralelogramo. Opcional la representación.

g) Demostrar que las rectas: $5x - y = 6$; $x + 5y - 22 = 0$; $5x - y = 32$; $5y + x + 4 = 0$ forman un cuadrado.

h) Como parte de un trabajo de investigación, un grupo de meteorólogos debió estudiar cuál es la temperatura (T) en °C, en función de la altura (h) en metros respecto del nivel del mar, en el Valle de la Luna. Después de numerosas mediciones para alturas entre 0 m y 15.000 m pudieron determinar la fórmula que vincula a estas dos variables: $T(h) = 20 - \frac{1}{150}h$
I. ¿T(h) es una función lineal? Justificar
II. ¿Cuál es la variable independiente y que representa?
III. ¿Qué dominio consideraron los investigadores para el estudio?
IV. ¿Cuál es la temperatura a 240 m sobre el nivel del mar?
V. ¿Es cierto que a los 1500 m se espera tener una temperatura de 11℃? ¿Por qué?
VI. ¿Cuál es la variación de temperatura por cada metro que se asciende?
VII. ¿A qué altura corresponde una temperatura de -1℃?

i) Una represa, cuya capacidad es de 1150 millones de litros, pierde desde el primer día 12 millones de litros diarios. Escribir la fórmula de la función que describe la cantidad de agua que permanece en la represa cada día. Graficar
I. ¿En cuánto tiempo se vacía la represa?
II. ¿En qué momento tendrá 70 millones de litros?
III. ¿Cuántos litros habrá a los 50 días?